Programación no-lineal entera para problemas de optimización de portafolios

Juan Pablo Vielma Shabbir Ahmed George L. Nemhauser

H. Milton Stewart School of Industrial and Systems Engineering
Georgia Institute of Technology

Universidad Adolfo Ibañez
Julio – 2008

Outline

Optimización de Portafolios y Programación No-Lineal Entera

- Optimización de Portafolios Tradicional (Markowitz):
  - Problema no-linear quadrático que puede ser resuelto eficientemente.
  - No muy realista.
- Optimización de Portafolios “Realista”:
  - Problema no-linear entero difícil de resolver.
  - Requiere el desarrollo de nuevos algoritmos.

Selección de un Portafolio de Inversión

- Opción de invertir en n activos diferentes (e.g. 100 acciones, 3 tipos de bonos y un deposito a plazo).
- Problema: seleccionar fracción de capital a invertir en cada activo.
- Información sobre los activos:
  - Retorno r de un activo:
    $($Valor en periodo $t+1) = (1+r)($Valor en periodo $t)$.
  - r es una variable aleatoria. Solo información parcial: valor esperado, desviación estándar, covarianza entre activos, etc.
- Objetivo de la selección:
  1. Maximizar el retorno esperado del portafolio.
  2. Minimizar el riesgo del portafolio.

Selección de un Portafolio de Inversión

- Opción de invertir en n activos diferentes (e.g. 100 acciones, 3 tipos de bonos y un deposito a plazo).
- Problema: seleccionar fracción de capital a invertir en cada activo.
- Información sobre los activos:
  - Retorno r de un activo: $($Valor en periodo $t+1) = (1+r)($Valor en periodo $t)$.
  - r es una variable aleatoria. Solo información parcial: valor esperado, desviación estándar, covarianza entre activos, etc.
- Objetivo de la selección:
  1. Maximizar el retorno esperado del portafolio.
  2. Minimizar el riesgo del portafolio.

Selección de un Portafolio de Inversión

- Opción de invertir en n activos diferentes (e.g. 100 acciones, 3 tipos de bonos y un deposito a plazo).
- Problema: seleccionar fracción de capital a invertir en cada activo.
- Información sobre los activos:
  - Retorno r de un activo:
    $($Valor en periodo $t+1) = (1+r)($Valor en periodo $t)$.
  - r es una variable aleatoria. Solo información parcial: valor esperado, desviación estándar, covarianza entre activos, etc.
- Objetivo de la selección:
  1. Maximizar el retorno esperado del portafolio.
  2. Mantener el riesgo del portafolio controlado.

Modelo Matemático para Optimización de Portafolio

$$\max_{y}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$y_j \geq 0 \quad \forall j$$

- y_j fracción de capital invertido en activo j.

Modelo Matemático para Optimización de Portafolio

$$\max_{y} \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$y_j \geq 0 \quad \forall j$$

- y_j fracción de capital invertido en activo j.
- $\bar{r}_j$: retorno esperado de activo j.

Modelo Matemático para Optimización de Portafolio

$$\max_{y} \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$y_j \geq 0 \quad \forall j$$

- y_j fracción de capital invertido en activo j.
- $\bar{r}_j$: retorno esperado de activo j.
- $q_{i,j}$: covarianza entre el retorno del activo i y j.

Modelo Matemático para Optimización de Portafolio

$$\max_{y} \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$y_j \geq 0 \quad \forall j$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_i\, y_j} \leq \sigma$$

- y_j fracción de capital invertido en activo j.
- $\bar{r}_j$: retorno esperado de activo j.
- $q_{i,j}$: covarianza entre el retorno del activo i y j.
- Limite en la varianza del portafolio (Markowitz).

Modelo Matemático para Optimización de Portafolio

$$\max_{y} \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$y_j \geq 0 \quad \forall j$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_i\, y_j} \leq \sigma$$

- y_j fracción de capital invertido en activo j.
- $\bar{r}_j$: retorno esperado de activo j.
- $q_{i,j}$: covarianza entre el retorno del activo i y j.
- Limite en la varianza del portafolio (Markowitz).
- Problema de *Programación Cónica Quadrática* que puede ser resuelto eficientemente.

Modelo Matemático para Optimización de Portafolio

$$\max_{y} \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$y_j \geq 0 \quad \forall j$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_i\, y_j} \leq \sigma$$

- y_j fracción de capital invertido en activo j.
- $\bar{r}_j$: retorno esperado de activo j.
- $q_{i,j}$: covarianza entre el retorno del activo i y j.
- Limite en la varianza del portafolio (Markowitz).
- Problema de *Programación Cónica Quadrática* que puede ser resuelto eficientemente.

Modelo Matemático para Optimización de Portafolio

$$\max_{y} \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$y_j \geq 0 \qquad \forall j$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_i\, y_j} \leq 0.2$$

- y_j fracción de capital invertido en activo j.
- $\bar{r}_j$: retorno esperado de activo j.
- $q_{i,j}$: covarianza entre el retorno del activo i y j.
- Limite en la varianza del portafolio (Markowitz).
- Problema de *Programación Cónica Quadrática* que puede ser resuelto eficientemente.

Extensiones del Modelo

1. Restricciones Combinatoriales:
    - límites en el numero de activos en el portafolio.
    - Niveles mínimos invertidos en cada activo.
    - Hacen que el problema sea muy difícil de resolver.
    - (Bienstock, 1996; Chang et al., 2000; Maringer and Kellerer, 2003; Bertsimas and Shioda, 2004,. . .).

Extensiones del Modelo

1. Restricciones Combinatoriales:
   - límites en el numero de activos en el portafolio.
   - Niveles mínimos invertidos en cada activo.
   - Hacen que el problema sea muy difícil de resolver.
   - (Bienstock, 1996; Chang et al., 2000; Maringer and Kellerer, 2003; Bertsimas and Shioda, 2004,...).
2. Medidas de riesgo más allá de la varianza:
   - límites en la probabilidad de baja rentabilidad (e.g. $\mathrm{Prob}(\text{retorno} \geq 0.9) \geq 0.8$ y $\mathrm{Prob}(\text{retorno} \geq 0.7) \geq 0.97$).
   - (Lobo et al. 1998, 2007).

Extensiones del Modelo

1. Restricciones Combinatoriales:
   - límites en el numero de activos en el portafolio.
   - Niveles mínimos invertidos en cada activo.
   - Hacen que el problema sea muy difícil de resolver.
   - (Bienstock, 1996; Chang et al., 2000; Maringer and Kellerer, 2003; Bertsimas and Shioda, 2004,...).
2. Medidas de riesgo más allá de la varianza:
   - límites en la probabilidad de baja rentabilidad (e.g. $\mathrm{Prob}(\text{retorno} \geq 0.9) \geq 0.8$ y $\mathrm{Prob}(\text{retorno} \geq 0.7) \geq 0.97$).
   - (Lobo et al. 1998, 2007).
3. Considerar errores en la estimación de los retornos esperados $\bar{r}_j$:
   - Considerar una versión *robusta* del objetivo.
   - (Ceria and Stubbs, 2006).

límites en el numero de activos en el portafolio

$$\max_{y} \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$y_j \geq 0 \qquad \forall j$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_i\, y_j} \leq 0.2$$

- Modelo Markowitz.

límites en el numero de activos en el portafolio

$$\max_{y} \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$y_j \geq 0 \qquad \forall j$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_i\, y_j} \leq 0.2$$

- Modelo Markowitz.
- Permitimos invertir en a lo mas K activos.

límites en el numero de activos en el portafolio

$$\max_{x,y} \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} y_j &= 1 \\ y_j &\geq 0 && \forall j \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_i\, y_j} &\leq 0.2 \\ y_j &\leq x_j && \forall j \\ x_j &\in \{0,1\} && \forall j \end{aligned}$$

- Modelo Markowitz.
- Permitimos invertir en a lo mas K activos.
- Agregamos variables binarias que indican si invertimos en un activo.

límites en el numero de activos en el portafolio

$$\max_{x,y} \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$y_j \geq 0 \qquad \forall j$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_i\, y_j} \leq 0.2$$

$$y_j \leq x_j \qquad \forall j$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad \forall j$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq K$$

- Modelo Markowitz.
- Permitimos invertir en a lo mas K activos.
- Agregamos variables binarias que indican si invertimos en un activo.
- Limite es impuesto con una restricción lineal.

límites en el numero de activos en el portafolio

$$\max_{x,y} \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$y_j \geq 0 \qquad \forall j$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_i\, y_j} \leq 0.2$$

$$y_j \leq x_j \qquad \forall j$$

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad \forall j$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq K$$

- Modelo Markowitz.
- Permitimos invertir en a lo mas K activos.
- Agregamos variables binarias que indican si invertimos en un activo.
- Limite es impuesto con una restricción lineal.
- Problema de *Programación Cónica Quadrática Mixta* que es difícil de resolver.

límites en el numero de activos en el portafolio

$$\max_{x,y} \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j$$

sujeto a

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} y_j &= 1 \\
y_j &\geq 0 && \forall j \\
\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_i\, y_j} &\leq 0.2 \\
y_j &\leq x_j && \forall j \\
x_j &\in \{0,1\} && \forall j \\
\sum_{j=1}^{n} x_j &\leq K
\end{aligned}
$$

- Modelo Markowitz.
- Permitimos invertir en a lo mas K activos.
- Agregamos variables binarias que indican si invertimos en un activo.
- Limite es impuesto con una restricción lineal.
- Problema de *Programación Cónica Quadrática Mixta* que es difícil de resolver.

límites en el numero de activos en el portafolio

$$\max_{x,y} \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$y_j \geq 0 \qquad \forall j$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_i\, y_j} \leq 0.2$$

$$y_j \leq x_j \qquad \forall j$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad \forall j$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq 10$$

- Modelo Markowitz.
- Permitimos invertir en a lo mas K activos.
- Agregamos variables binarias que indican si invertimos en un activo.
- Limite es impuesto con una restricción lineal.
- Problema de *Programación Cónica Quadrática Mixta* que es difícil de resolver.

Medidas de riesgo mas allá de la varianza

- Varianza: $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_i\, y_j} \leq \sigma$.
- Retorno: $\sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j$.
- $\mathrm{Prob}(\text{retorno} \geq w) \geq \eta$ puede ser aproximado por:

$$\Phi^{-1}(\eta)\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_i\, y_j} \leq \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j - w$$

  donde $\Phi(\cdot)$ es la distribución de probabilidad de una normal con media 0 y varianza 1.
- También es una restricción de Problema de *Programación Cónica Quadrática*.
- $\eta_1 = 0.8$, $w_1 = 0.9$ y $\eta_2 = 0.97$, $w_2 = 0.7$.

Considerar errores en retornos esperados $\bar{r}_j$

$$\max_{x,y} \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \leq 10$$

$$y_j \leq x_j, \quad x_j \in \{0,1\}, \quad y_j \geq 0 \qquad \forall j$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_i\, y_j} \leq 0.2$$

- Modelo Markowitz con límites en el numero de activos.

Considerar errores en retornos esperados $\bar{r}_j$

$$\max_{x,y} \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \leq 10$$

$$y_j \leq x_j, \quad x_j \in \{0,1\}, \quad y_j \geq 0 \qquad \forall j$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_i\, y_j} \leq 0.2$$

- Modelo Markowitz con límites en el numero de activos.

Considerar errores en retornos esperados $\bar{r}_j$

$$\max_{x,y,r} \quad r$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \leq 10$$

$$y_j \leq x_j, \quad x_j \in \{0,1\}, \quad y_j \geq 0 \qquad \forall j$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_i\, y_j} \leq 0.2$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j \geq r$$

- Modelo Markowitz con límites en el numero de activos.

Considerar errores en retornos esperados $\bar{r}_j$

$$\max_{x,y,r} \quad r$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \leq 10$$

$$y_j \leq x_j, \quad x_j \in \{0,1\}, \quad y_j \geq 0 \qquad \forall j$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_i\, y_j} \leq 0.2$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j \geq r$$

- Modelo Markowitz con límites en el numero de activos.
- Suposición: los retornos esperados $\bar{r}_j$ tienen una distribución normal conjunta. Media es $\bar{r}_j$ y covarianza entre $\bar{r}_i$ y $\bar{r}_j$ es $s_{i,j}$.

Considerar errores en retornos esperados $\bar{r}_j$

$$\max_{x,y,r} \quad r$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \leq 10$$

$$y_j \leq x_j, \quad x_j \in \{0,1\}, \quad y_j \geq 0 \qquad \forall j$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{i,j} y_i y_j} \leq 0.2$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j - \alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{i,j} y_i y_j} \geq r$$

- Modelo Markowitz con límites en el numero de activos.
- Suposición: los retornos esperados $\bar{r}_j$ tienen una distribución normal conjunta. Media es $\bar{r}_j$ y covarianza entre $\bar{r}_i$ y $\bar{r}_j$ es $s_{i,j}$.
- Versión *robusta* del objetivo.
  $\alpha =$ nivel de seguridad.

Considerar errores en retornos esperados $\bar{r}_j$

$$\max_{x,y,r} \quad r$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \leq 10$$

$$y_j \leq x_j, \quad x_j \in \{0,1\}, \quad y_j \geq 0 \qquad \forall j$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_i\, y_j} \leq 0.2$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j - \alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{i,j}\, y_i\, y_j} \geq r$$

- Modelo Markowitz con límites en el numero de activos.
- Suposición: los retornos esperados $\bar{r}_j$ tienen una distribución normal conjunta. Media es $\bar{r}_j$ y covarianza entre $\bar{r}_i$ y $\bar{r}_j$ es $s_{i,j}$.
- Versión *robusta* del objetivo. $\alpha =$ nivel de seguridad.
- Restricción de Problema de *Programación Cónica Quadrática*.

Considerar errores en retornos esperados $\bar{r}_j$

$$\max_{x,y,r} \quad r$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \leq 10$$

$$y_j \leq x_j, \quad x_j \in \{0,1\}, \quad y_j \geq 0 \qquad \forall j$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_i\, y_j} \leq 0.2$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j - \alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{i,j}\, y_i\, y_j} \geq r$$

- Modelo Markowitz con límites en el numero de activos.
- Suposición: los retornos esperados $\bar{r}_j$ tienen una distribución normal conjunta. Media es $\bar{r}_j$ y covarianza entre $\bar{r}_i$ y $\bar{r}_j$ es $s_{i,j}$.
- Versión *robusta* del objetivo.
  $\alpha =$ nivel de seguridad.
- Restricción de Problema de *Programación Cónica Quadrática*.

Considerar errores en retornos esperados $\bar{r}_j$

$$\max_{x,y,r} \quad r$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \leq 10$$

$$y_j \leq x_j, \quad x_j \in \{0,1\}, \quad y_j \geq 0 \quad \forall j$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_i\, y_j} \leq 0.2$$

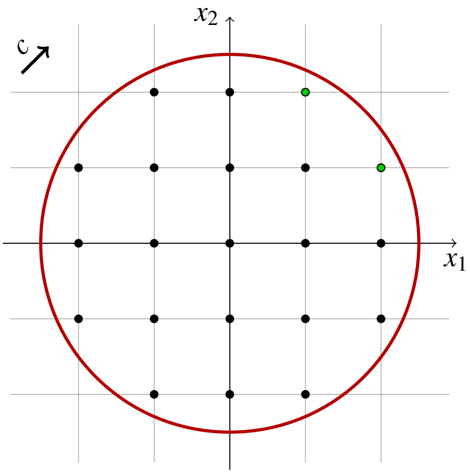
$$\sum_{j=1}^{n} \bar{r}_j y_j - 3\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{i,j}\, y_i\, y_j} \geq r$$

- Modelo Markowitz con límites en el numero de activos.
- Suposición: los retornos esperados $\bar{r}_j$ tienen una distribución normal conjunta. Media es $\bar{r}_j$ y covarianza entre $\bar{r}_i$ y $\bar{r}_j$ es $s_{i,j}$.
- Versión *robusta* del objetivo.
  $\alpha =$ nivel de seguridad.
- Restricción de Problema de *Programación Cónica Quadrática*.

B&B para Programación Entera No-Lineal

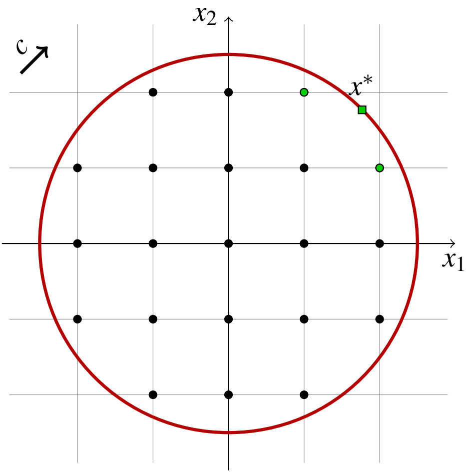
- Branch-and-Bound básico:
  - Relajación del Problema.
  - Ramificación.
  - Problema Relajado + Ramificación: Subproblema.
- Métodos basados en relajación no-lineal:
  - Relajan restricciones de integralidad.
  - Subproblema es un problema no-lineal convexo.
- Métodos basados en relajaciones polyhedrales:
  - Relajan restricciones de integralidad y no-lineales.
  - Subproblema es un problema lineal.
  - Reutilizan tecnología para Programación lineal entera y aprovechan *warm starts* de simplex.
  - Dos Tipos:
    1. Relajaciones polyhedrales por tangentes.
    2. Relajaciones polyhedrales extendidas o por proyección (Nuevo Método).

Métodos Basados en Relajación No-Lineal



$$
\begin{aligned}
\max_{x} \quad & x_1 + x_2 \\
& \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Métodos Basados en Relajación No-Lineal



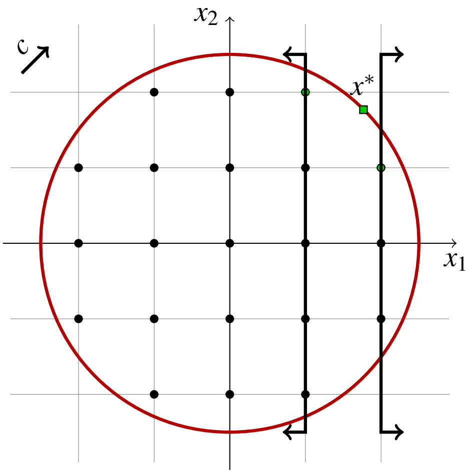
$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Subproblema:

$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$

- $x_1^* = x_2^* \approx 1.77 \notin \mathbb{Z}$.
- Ramificación: $x_1 \leq 1 \vee x_1 \geq 2$.

Métodos Basados en Relajación No-Lineal



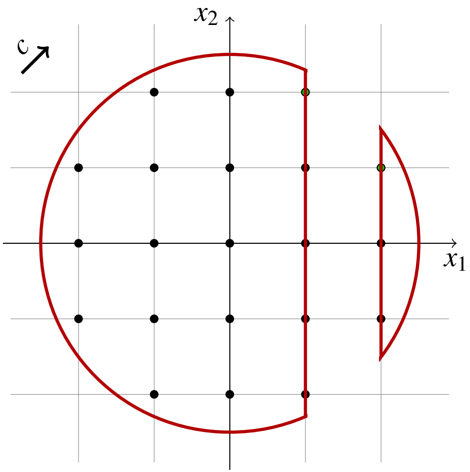
$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Subproblema:

$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$

- $x_1^* = x_2^* \approx 1.77 \notin \mathbb{Z}$.
- Ramificación:
  $x_1 \leq 1 \ \vee \ x_1 \geq 2$.

Métodos Basados en Relajación No-Lineal



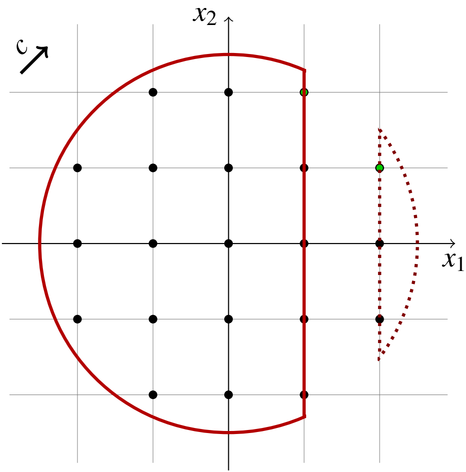
$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Subproblema:

$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$

- $x_1^* = x_2^* \approx 1.77 \notin \mathbb{Z}$.
- Ramificación: $x_1 \leq 1 \vee x_1 \geq 2$.

Métodos Basados en Relajación No-Lineal



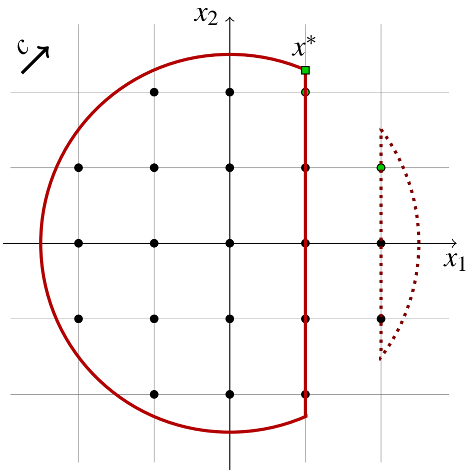
$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Subproblema:

$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1 \leq 1$$

- $x_1^* = 1,\ x_2^* \approx 2.29 \notin \mathbb{Z}$.
- Ramificación: $x_2 \leq 2 \ \vee \ x_2 \geq 3$.

Métodos Basados en Relajación No-Lineal



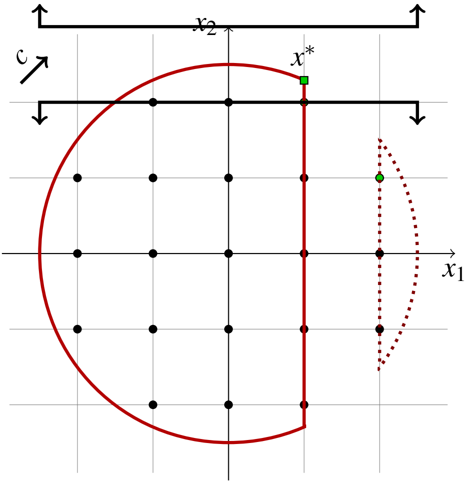
$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Subproblema:

$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1 \leq 1$$

- $x_1^* = 1,\ x_2^* \approx 2.29 \notin \mathbb{Z}$.
- Ramificación:
  $x_2 \leq 2 \ \vee \ x_2 \geq 3$.

Métodos Basados en Relajación No-Lineal



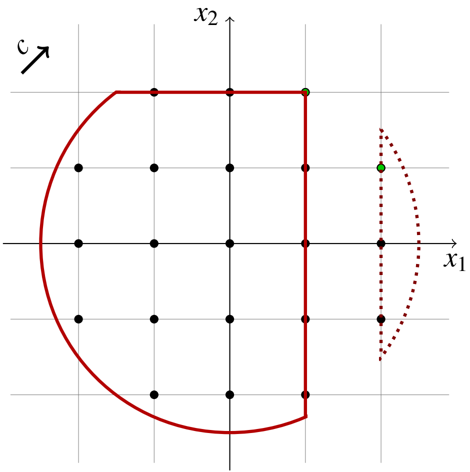
$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Subproblema:

$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1 \leq 1$$

- $x_1^* = 1,\ x_2^* \approx 2.29 \notin \mathbb{Z}$.
- Ramificación:
  $x_2 \leq 2 \vee x_2 \geq 3$.

Métodos Basados en Relajación No-Lineal



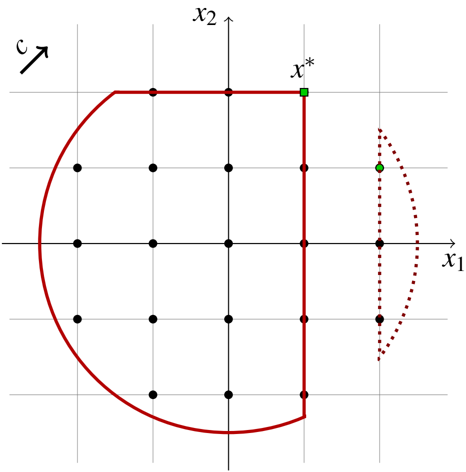
$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Subproblema:

$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1 \leq 1$$
$$x_2 \leq 2$$

- $x_1^* = 1, x_2^* = 2.$

Métodos Basados en Relajación No-Lineal



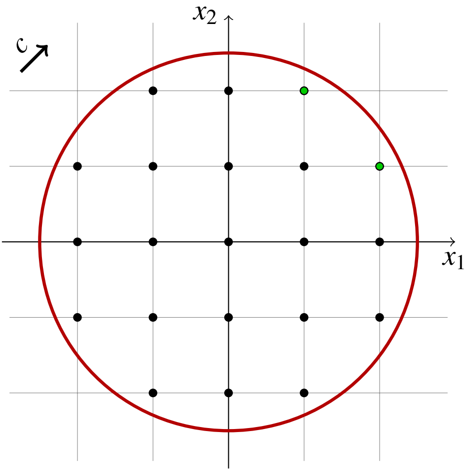
$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Subproblema:

$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1 \leq 1$$
$$x_2 \leq 2$$

- $x_1^* = 1,\ x_2^* = 2$.

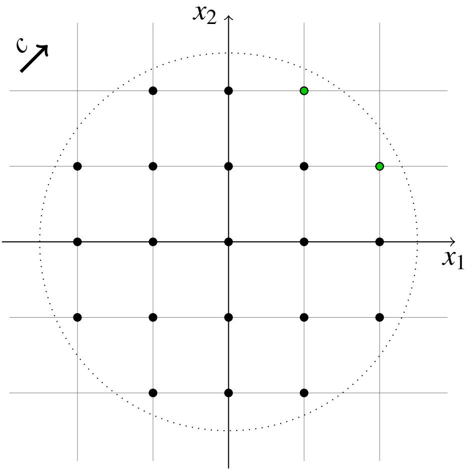
Relajaciones Polyhedrales Tangentes



$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Subproblema:

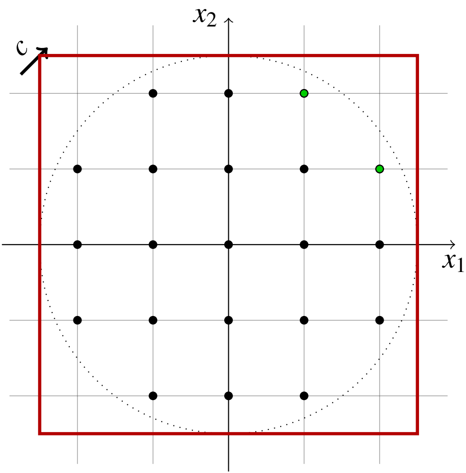
Relajaciones Polyhedrales Tangentes



$$\max_{x} \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Subproblema:

Relajaciones Polyhedrales Tangentes

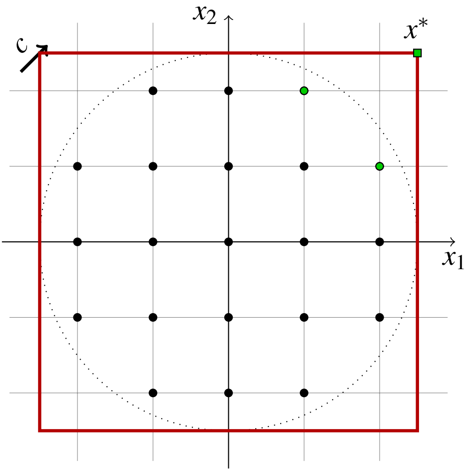


$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \le 2.5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Subproblema:

$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$-2.5 \le x_i \le 2.5$$

Relajaciones Polyhedrales Tangentes



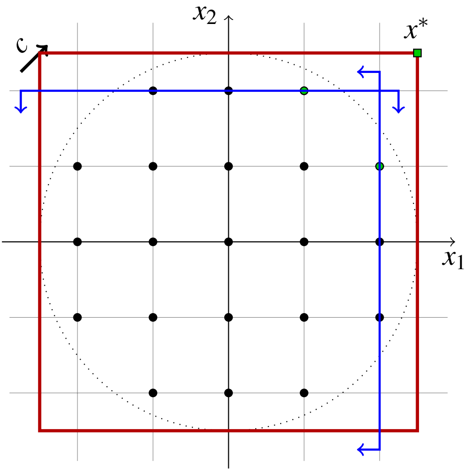
$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Subproblema:

$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$-2.5 \leq x_i \leq 2.5$$

- $x_1^* = x_2^* = 2.5 \notin \mathbb{Z}$.
- Cortes: $x_i \leq \lfloor 2.5 \rfloor$.

Relajaciones Polyhedrales Tangentes



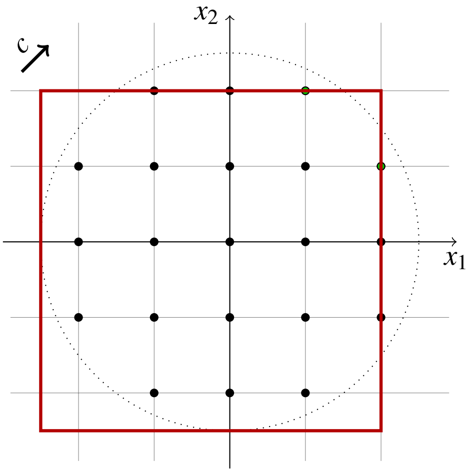
$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Subproblema:

$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$-2.5 \leq x_i \leq 2.5$$

- $x_1^* = x_2^* = 2.5 \notin \mathbb{Z}$.
- Cortes: $x_i \leq \lfloor 2.5 \rfloor$.

Relajaciones Polyhedrales Tangentes

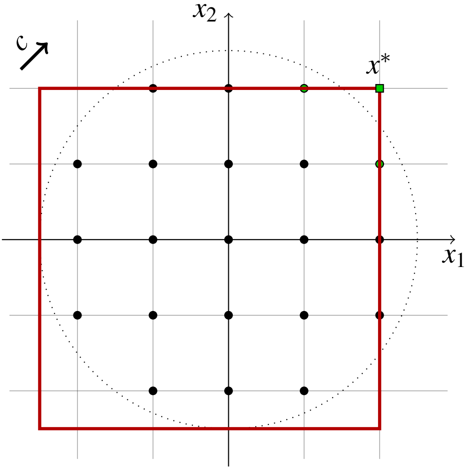


$$\max_{x} \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Subproblema:

$$\max_{x} \quad x_1 + x_2$$
$$-2.5 \leq x_i \leq 2$$

Relajaciones Polyhedrales Tangentes



$$\max_x \quad x_1 + x_2$$

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

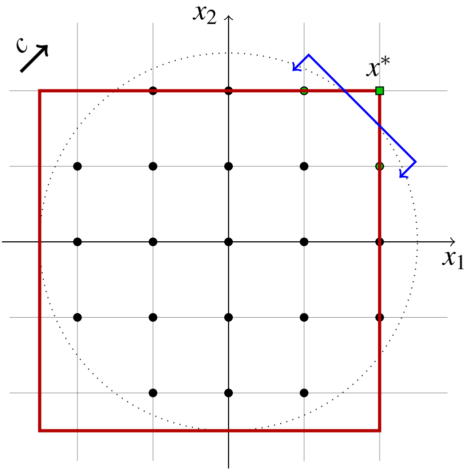
Subproblema:

$$\max_x \quad x_1 + x_2$$

$$-2.5 \leq x_i \leq 2$$

- $x_1^* = x_2^* = 2$, $\sqrt{x_1^{*2} + x_2^{*2}} > 2.5$.
- Corte: $x_1 + x_2 \leq 2.5\sqrt{2}$.

Relajaciones Polyhedrales Tangentes



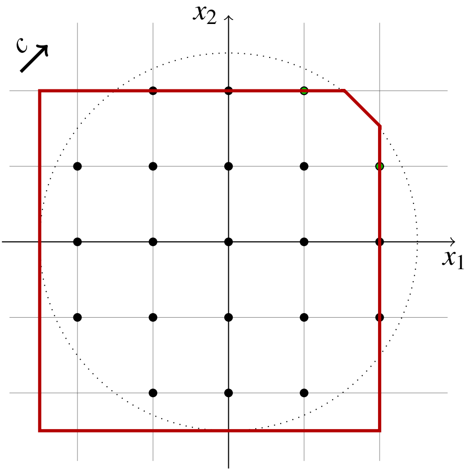
$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Subproblema:

$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$-2.5 \leq x_i \leq 2$$

- $x_1^* = x_2^* = 2$, $\sqrt{x_1^{*2} + x_2^{*2}} > 2.5$.
- Corte: $x_1 + x_2 \leq 2.5\sqrt{2}$.

Relajaciones Polyhedrales Tangentes



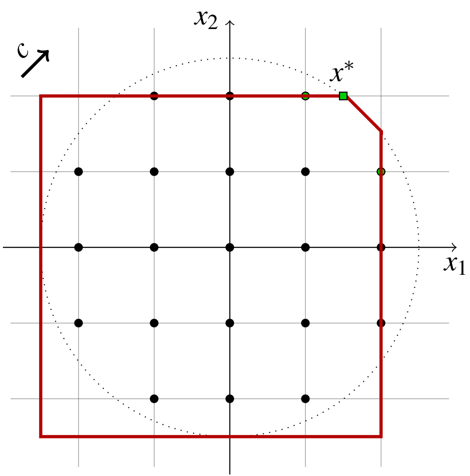
$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Subproblema:

$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$-2.5 \leq x_i \leq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 2.5\sqrt{2}$$

- $x_2^* = 2$, $x_1^* \approx 1.53 \notin \mathbb{Z}$, $\sqrt{x_1^{*2} + x_2^{*2}} > 2.5$.
- Ramificación: $x_1 \leq 1 \vee x_1 \geq 2$.

Relajaciones Polyhedrales Tangentes



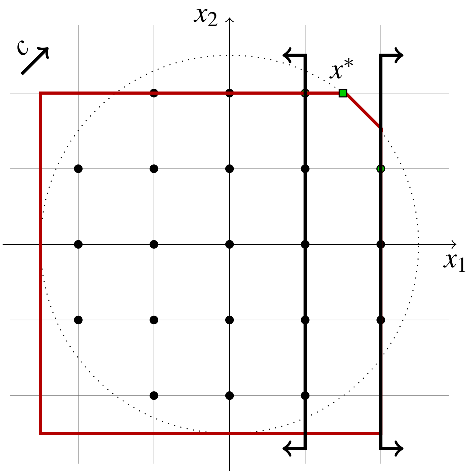
$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Subproblema:

$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$-2.5 \leq x_i \leq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 2.5\sqrt{2}$$

- $x_2^* = 2,\ x_1^* \approx 1.53 \notin \mathbb{Z}$, $\sqrt{{x_1^*}^2 + {x_2^*}^2} > 2.5$.
- Ramificación: $x_1 \leq 1 \vee x_1 \geq 2$.

Relajaciones Polyhedrales Tangentes



$$\max_x \quad x_1 + x_2$$

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Subproblema:

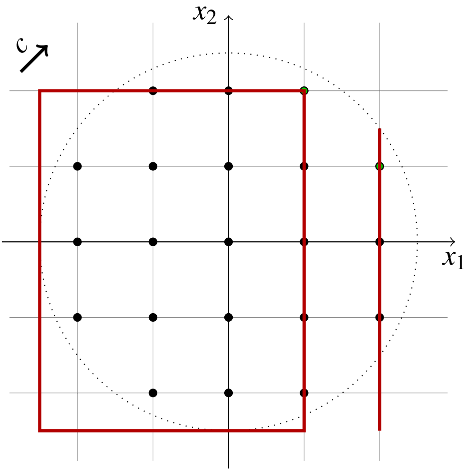
$$\max_x \quad x_1 + x_2$$

$$-2.5 \leq x_i \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 2.5\sqrt{2}$$

- $x_2^* = 2$, $x_1^* \approx 1.53 \notin \mathbb{Z}$, $\sqrt{x_1^{*2} + x_2^{*2}} > 2.5$.
- Ramificación: $x_1 \leq 1 \vee x_1 \geq 2$.

Relajaciones Polyhedrales Tangentes



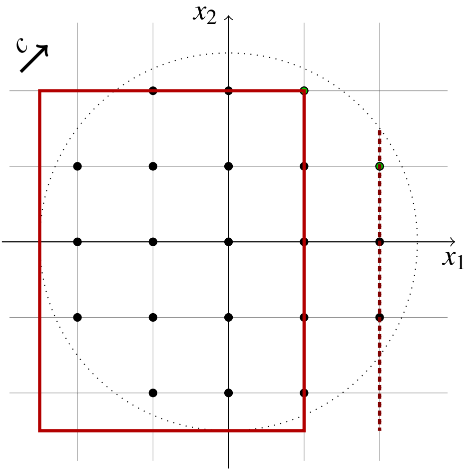
$$\max_{x} \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Subproblema:

$$\max_{x} \quad x_1 + x_2$$
$$-2.5 \leq x_i \leq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 2.5\sqrt{2}$$

- $x_2^* = 2,\ x_1^* \approx 1.53 \notin \mathbb{Z}$, $\sqrt{x_1^{*2} + x_2^{*2}} > 2.5$.
- Ramificación: $x_1 \leq 1 \ \vee \ x_1 \geq 2$.

Relajaciones Polyhedrales Tangentes



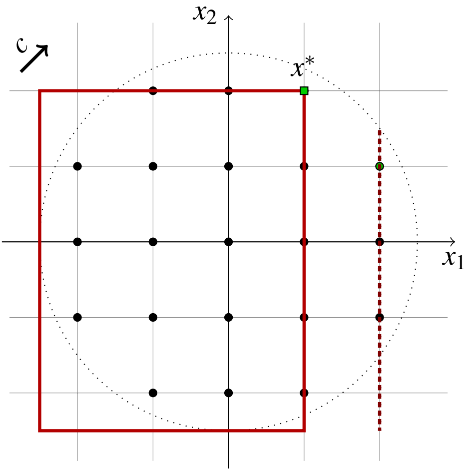
$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Subproblema:

$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$-2.5 \leq x_i \leq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 2.5\sqrt{2}$$
$$x_1 \leq 1$$

- $x_1^* = 1, x_2^* = 2.$

Relajaciones Polyhedrales Tangentes



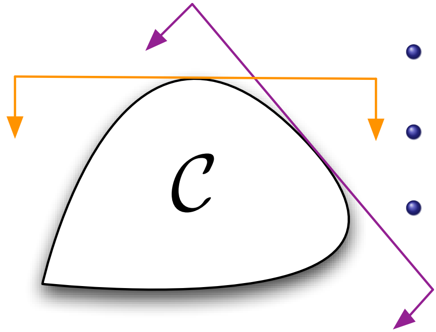
$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 2.5$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Subproblema:

$$\max_x \quad x_1 + x_2$$
$$-2.5 \leq x_i \leq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 2.5\sqrt{2}$$
$$x_1 \leq 1$$

- $x_1^* = 1,\ x_2^* = 2.$

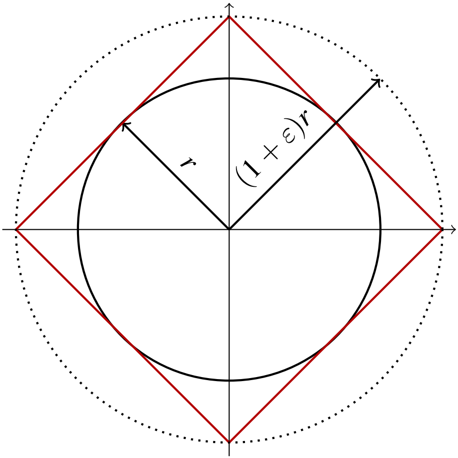
Características de Relajaciones Polyhedrales Tangentes



- Restricciones no lineales aproximada por cortes de primer orden (gradiente, tangente, benders).
- Cortes construidos en espacio original.
- Usualmente pocos cortes son suficientes.
- Convergencia puede ser lenta (e.g. Restricciones cuadráticas).
  - Solución: usar una aproximación polyhedral global y fija.

Relajaciones Polyedrales

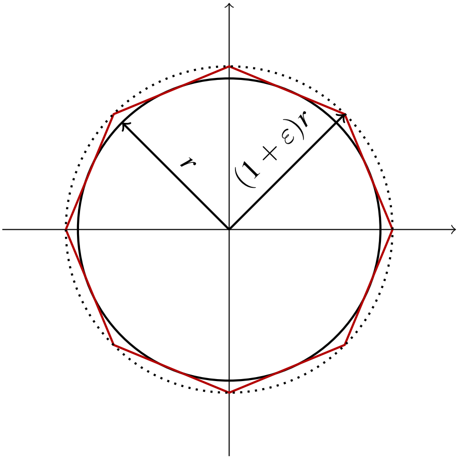
$\sqrt{\sum_{j=1}^{d} x_j^2} \leq r,\ d = 2,\ \varepsilon = 0.41$



- Se necesitan a lo menos $\exp(d/(2(1+\varepsilon))^2)$ restricciones lineales en el espacio original.
- Ben-Tal and Nemirovski (2001) dan relajación como la proyección de un polyhedro con $O(d \log(1/\varepsilon))$ variables y restricciones.
- Glineur (2000) refina la aproximación y muestra que no es "práctica" para Programación no-lineal continua.

Relajaciones Polyedrales

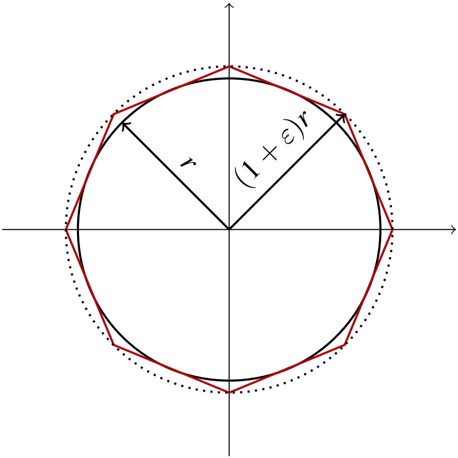
$$\sqrt{\sum_{j=1}^{d} x_j^2} \leq r,\ d = 2,\ \varepsilon = 0.08$$



- Se necesitan a lo menos $\exp(d/(2(1+\varepsilon))^2)$ restricciones lineales en el espacio original.
- Ben-Tal and Nemirovski (2001) dan relajación como la proyección de un polyhedro con $O(d \log(1/\varepsilon))$ variables y restricciones.
- Glineur (2000) refina la aproximación y muestra que no es “práctica” para Programación no-lineal continua.

Relajaciones Polyedrales

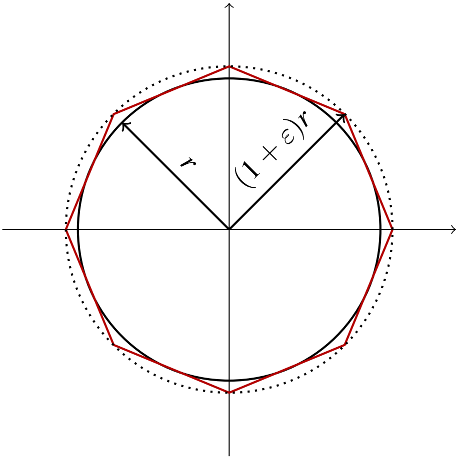
$$\sqrt{\sum_{j=1}^{d} x_j^2} \leq r,\ d = 2,\ \varepsilon = 0.08$$



- Se necesitan a lo menos $\exp(d/(2(1+\varepsilon))^2)$ restricciones lineales en el espacio original.
- Ben-Tal and Nemirovski (2001) dan relajación como la proyección de un polyhedro con $O(d \log(1/\varepsilon))$ variables y restricciones.
- Glineur (2000) refina la aproximación y muestra que no es "práctica" para Programación no-lineal continua.

Relajaciones Polyedrales

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{d} x_j^2} \leq r,\; d = 2,\; \varepsilon = 0.08$$



- Se necesitan a lo menos $\exp(d/(2(1+\varepsilon))^2)$ restricciones lineales en el espacio original.
- Ben-Tal and Nemirovski (2001) dan relajación como la proyección de un polyhedro con $O(d \log(1/\varepsilon))$ variables y restricciones.
- Glineur (2000) refina la aproximación y muestra que no es "práctica" para Programación no-lineal continua.

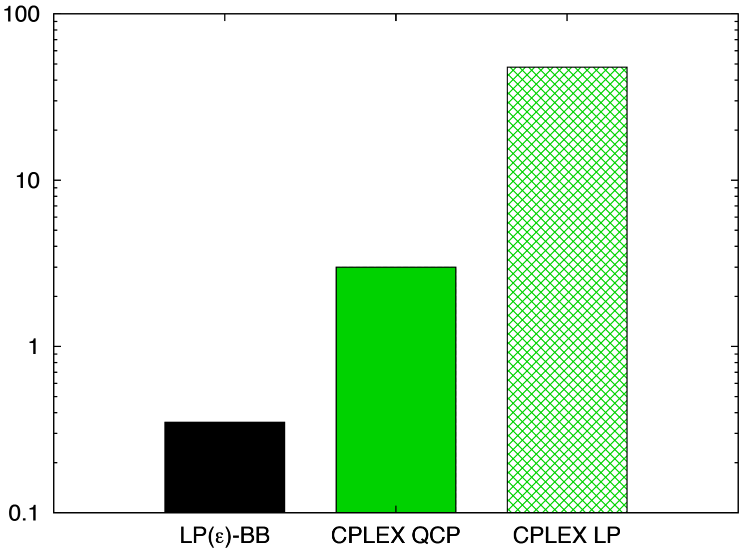
B&B Usando Relajación Polyhedral Extendida (proyección).

- Reemplazar restricciones no-lineales por relajaciones polyhedrales extendidas para precisión ε.
- Obtenemos problema de Programación lineal entera que puede ser resuelto por software comercial (e.g. CPLEX).
- Pequeñas modificaciones al software comercial aseguran obtener solución exacta.
- Obtención de solución exacta es independiente de precisión ε.
- Elección de precisión ε puede afectar velocidad.
- Vielma, et. al, “A Lifted Linear Programming Branch-and-Bound Algorithm for Mixed Integer Conic Quadratic Programs”, IJOC.

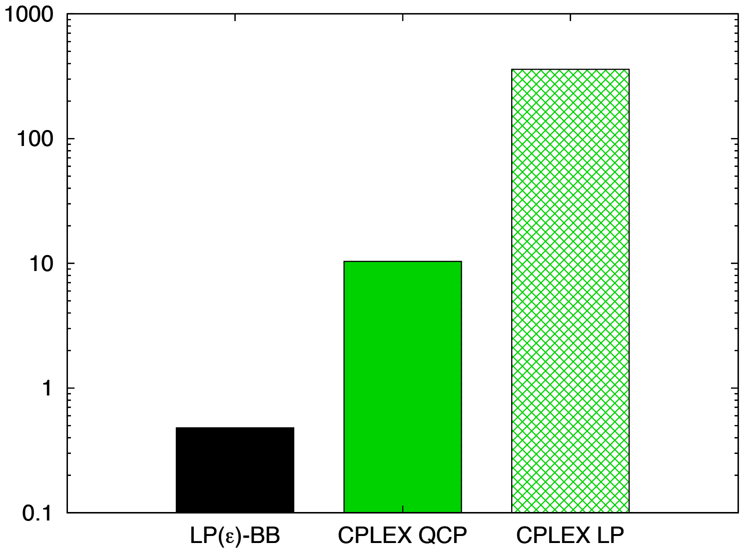
Experimentos Computacionales

- 3 tipos de problemas de Optimización de portafolios:
  - Numero de activos disponibles: 20 y 30 (limite de inversión el 10 activos).
  - Retornos estimados de acciones de S&P 500.
  - 200 instancias en total.
- Computador: Dual 2.4GHz Xeon Linux workstation with 2GB of RAM.
- Solvers:
  - CPLEX 11 B&B de relajación no-lineal (CPLEX QCP).
  - CPLEX 11 B&B de relajación polyedral tangente (CPLEX LP).
  - Algoritmo B&B de relajación polyedral extendida basado en CPLEX 11 (LP(ε) -BB).

Tiempos de Solución Promedio [s]



Tiempos de Solución (Desviación Estándar) [s]



Using Ben-Tal Nemirovski Approximation to Exploit Mixed Integer Linear Programming Solver Technology

- Lifted linear programming relaxation: Polyhedron $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n+p+q}$ such that

$$\mathcal{C} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+p} \ : \ \exists\, v \in \mathbb{R}^{q} \text{ s.t. } (x, y, v) \in \mathcal{P}\} \approx \mathcal{C}$$

- Use a state of the art MILP solver to solve

$$\begin{aligned} \max_{x,y,v} \quad & cx + dy \\ s.t. \quad & (x, y, v) \in \mathcal{P} \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned} \qquad \text{(MILP)}$$

- Problem: Obtained solution might not even be feasible for MINLP
- Solution: Modify Solve of MILP

Idea: Simulate NLP Branch-and-Bound

- Problem solved in NLP B&B node $(l^k, u^k) \in \mathbb{Z}^{2n}$ is:

$$
\begin{aligned}
z_{\text{NLP}(l^k,u^k)} := \max_{x,y} \quad & cx + dy \\
s.t. \quad & (x,y) \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{n+p} \qquad (\text{NLP}(l^k,u^k)) \\
& l^k \leq x \leq u^k
\end{aligned}
$$

- Problem solved by state of the art MILP solver is:

$$
\begin{aligned}
z_{\text{LP}(l^k,u^k)} := \max_{x,y,v} \quad & cx + dy \\
s.t. \quad & (x,y,v) \in \mathcal{P} \qquad (\text{LP}(l^k,u^k)) \\
& l^k \leq x \leq u^k
\end{aligned}
$$

Idea: Simulate NLP Branch-and-Bound

- Problem solved in NLP B&B node $(l^k, u^k) \in \mathbb{Z}^{2n}$ is:

$$\begin{aligned} z_{\text{NLP}(l^k,u^k)} := \max_{x,y} \quad & cx + dy \\ s.t. \quad & (x,y) \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{n+p} \\ & l^k \leq x \leq u^k \end{aligned} \qquad (\text{NLP}(l^k,u^k))$$

- Problem solved by state of the art MILP solver is:

$$\begin{aligned} z_{\text{LP}(l^k,u^k)} := \max_{x,y,v} \quad & cx + dy \\ s.t. \quad & (x,y,v) \in \mathcal{P} \\ & l^k \leq x \leq u^k \end{aligned} \qquad (\text{LP}(l^k,u^k))$$

- Advantages of second subproblem:
  - Algorithmic Advantage: Simplex has warm starts.
  - Computational Advantage: Use MILP solver's technology.

Idea: Simulate NLP Branch-and-Bound

- Problem solved in NLP B&B node $(l^k, u^k) \in \mathbb{Z}^{2n}$ is:

$$\begin{aligned} z_{\mathrm{NLP}(l^k,u^k)} := \max_{x,y} \quad & cx + dy \\ s.t. \quad & (x,y) \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{n+p} \\ & l^k \le x \le u^k \end{aligned} \qquad (\mathrm{NLP}(l^k,u^k))$$

- Problem solved by state of the art MILP solver is:

$$\begin{aligned} z_{\mathrm{LP}(l^k,u^k)} := \max_{x,y,v} \quad & cx + dy \\ s.t. \quad & (x,y,v) \in \mathcal{P} \\ & l^k \le x \le u^k \end{aligned} \qquad (\mathrm{LP}(l^k,u^k))$$

- Issues:
  1. Integer feasible solutions may be infeasible for $\mathcal{C}$.
  2. Need to be careful when fathoming by integrality.

First Issue: Correcting Integer Feasible Solutions

- Let $(x^*, y^*, v^*) \in \mathcal{P}$ such that $x^* \in \mathbb{Z}^n$, but $(x^*, y^*) \notin \mathcal{C}$.
- We reject (x^*, y^*, v^*) and try to correct it using:

$$
\begin{aligned}
z_{\text{NLP}(x^*)} := \max_{y} \quad & cx^* + dy \\
s.t. \quad & \\
& (x^*, y) \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{n+p}.
\end{aligned}
\qquad (\text{NLP}(x^*))
$$

- This can be done for solutions found by heuristics, at integer feasible nodes, etc.

Second Issue: Correct Fathoming by Integrality

- Suppose that for a node (l^k, u^k) with $l^k \neq u^k$ we have that the solution (x^*, y^*, v^*) of LP(l^k, u^k) is such that $x^* \in \mathbb{Z}^n$
- If $(x^*, y^*) \in \mathcal{C}$ then (x^*, y^*) is also the optimal for NLP(l^k, u^k) and we can fathom by integrality.
- If $(x^*, y^*) \notin \mathcal{C}$ it is not sufficient to solve NLP(x^*):
  - Problem: Corrected solution is not necessarily optimal for NLP(l^k, u^k).
  - Solution: Solve NLP(l^k, u^k) and process node according to its solution.

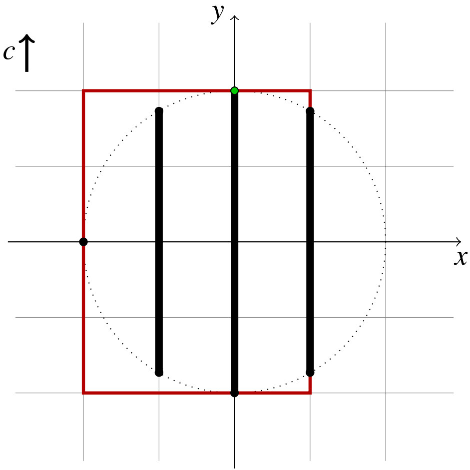
Second Issue: Correct Fathoming by Integrality

- Suppose that for a node (l^k, u^k) with $l^k \neq u^k$ we have that the solution (x^*, y^*, v^*) of LP(l^k, u^k) is such that $x^* \in \mathbb{Z}^n$
- If $(x^*, y^*) \in \mathcal{C}$ then (x^*, y^*) is also the optimal for NLP(l^k, u^k) and we can fathom by integrality.
- If $(x^*, y^*) \notin \mathcal{C}$ it is not sufficient to solve NLP(x^*):
  - Problem: Corrected solution is not necessarily optimal for NLP(l^k, u^k).
  - Solution: Solve NLP(l^k, u^k) and process node according to its solution.

Second Issue: Correct Fathoming by Integrality

- Suppose that for a node (l^k, u^k) with $l^k \neq u^k$ we have that the solution (x^*, y^*, v^*) of LP(l^k, u^k) is such that $x^* \in \mathbb{Z}^n$
- If $(x^*, y^*) \in \mathcal{C}$ then (x^*, y^*) is also the optimal for NLP(l^k, u^k) and we can fathom by integrality.
- If $(x^*, y^*) \notin \mathcal{C}$ it is not sufficient to solve NLP(x^*):
    - Problem: Corrected solution is not necessarily optimal for NLP(l^k, u^k).
    - Solution: Solve NLP(l^k, u^k) and process node according to its solution.

Correcting Integer Feasible Solutions is Not Enough



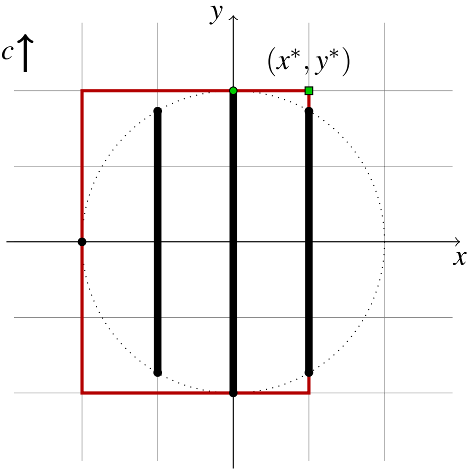
$$\max_{x,y} \quad y$$
$$(x,y) \in \mathcal{B}^2(2) \quad \text{(MINLP)}$$
$$x \in \mathbb{Z}$$

$$\max_{x,y} \quad y$$
$$(x,y) \in [-2,2]^2 \quad \text{(LP)}$$

LP$(-\infty, 1)$:

- $x^* = 1, y^* = 2$, $(x,y) \notin \mathcal{B}^2(2)$.
- NLP$(x^*) \rightarrow (x^{cor}, y^{cor})$.
- If we fathom we loose optimum $(0,2)$!

Correcting Integer Feasible Solutions is Not Enough



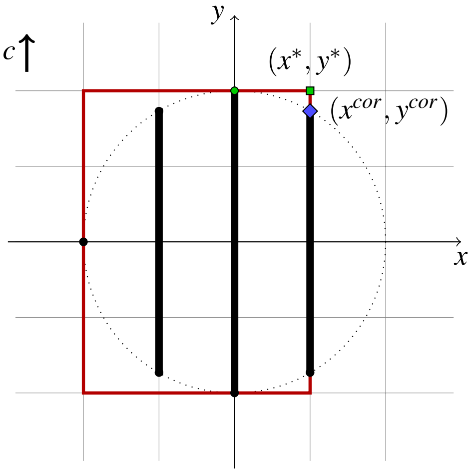
$$\max_{x,y} \quad y$$
$$(x, y) \in \mathcal{B}^2(2) \quad \text{(MINLP)}$$
$$x \in \mathbb{Z}$$

$$\max_{x,y} \quad y$$
$$(x, y) \in [-2, 2]^2 \quad \text{(LP)}$$

LP$(-\infty, 1)$:

- $x^* = 1$, $y^* = 2$, $(x, y) \notin \mathcal{B}^2(2)$.
- NLP$(x^*) \to (x^{cor}, y^{cor})$.
- If we fathom we loose optimum $(0, 2)$!

Correcting Integer Feasible Solutions is Not Enough



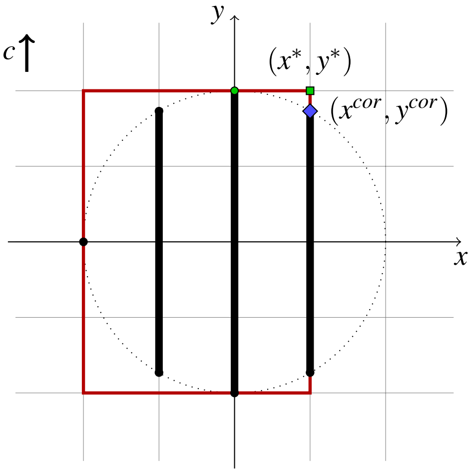
$$\max_{x,y} \quad y$$
$$(x,y) \in \mathcal{B}^2(2) \quad \text{(MINLP)}$$
$$x \in \mathbb{Z}$$

$$\max_{x,y} \quad y$$
$$(x,y) \in [-2,2]^2 \quad \text{(LP)}$$

LP$(-\infty, 1)$:

- $x^* = 1$, $y^* = 2$, $(x,y) \notin \mathcal{B}^2(2)$.
- NLP$(x^*) \rightarrow (x^{cor}, y^{cor})$.
- If we fathom we loose optimum $(0,2)$!

Correcting Integer Feasible Solutions is Not Enough



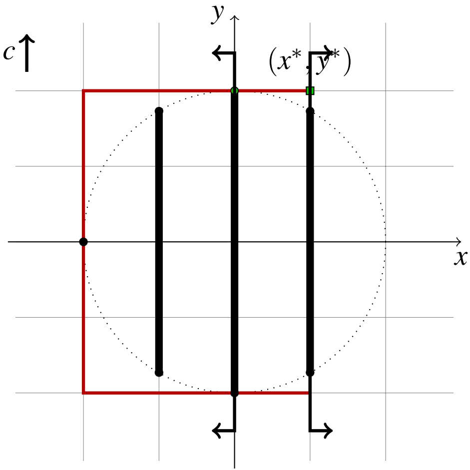
$$\max_{x,y} \quad y$$
$$(x,y) \in \mathcal{B}^2(2) \quad \text{(MINLP)}$$
$$x \in \mathbb{Z}$$

$$\max_{x,y} \quad y$$
$$(x,y) \in [-2,2]^2 \quad \text{(LP)}$$

LP$(-\infty, 1)$:

- $x^* = 1$, $y^* = 2$, $(x,y) \notin \mathcal{B}^2(2)$.
- NLP$(x^*) \to (x^{cor}, y^{cor})$.
- If we fathom we loose optimum $(0,2)$!

Correcting Integer Feasible Solutions is Not Enough



$$\max_{x,y} \quad y$$

$$(x, y) \in \mathcal{B}^2(2) \quad \text{(MINLP)}$$

$$x \in \mathbb{Z}$$

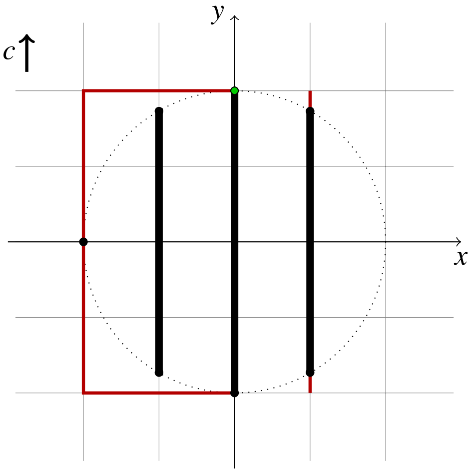
$$\max_{x,y} \quad y$$

$$(x, y) \in [-2, 2]^2 \quad \text{(LP)}$$

Solution 1:

- Branch: $x \leq 0 \ \vee \ x \geq 1$.
- Solve LP$(-\infty, 0)$.
- We get optimum $(0, 2)$.

Correcting Integer Feasible Solutions is Not Enough



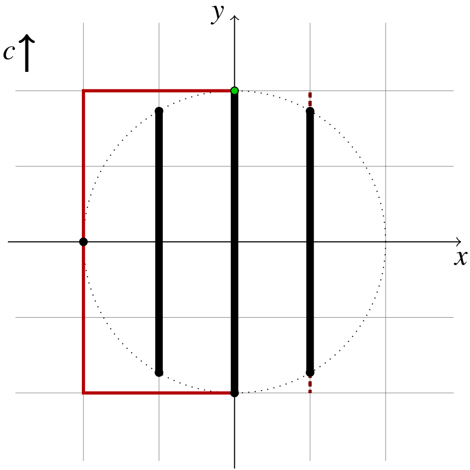
$$\max_{x,y} \quad y$$
$$(x,y) \in \mathcal{B}^2(2) \quad \text{(MINLP)}$$
$$x \in \mathbb{Z}$$

$$\max_{x,y} \quad y$$
$$(x,y) \in [-2,2]^2 \quad \text{(LP)}$$

Solution 1:

- Branch: $x \leq 0 \ \vee \ x \geq 1$.
- Solve LP$(-\infty, 0)$.
- We get optimum $(0,2)$.

Correcting Integer Feasible Solutions is Not Enough



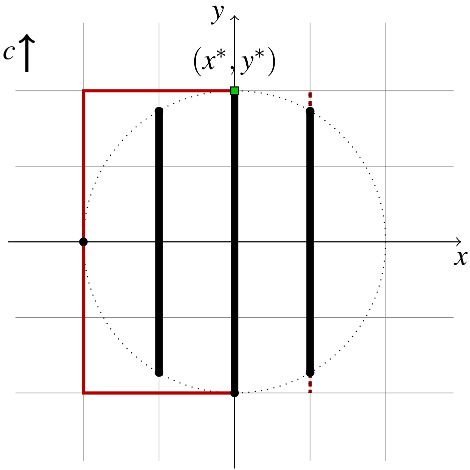
$$\max_{x,y} \quad y$$
$$(x, y) \in \mathcal{B}^2(2) \quad \text{(MINLP)}$$
$$x \in \mathbb{Z}$$

$$\max_{x,y} \quad y$$
$$(x, y) \in [-2, 2]^2 \quad \text{(LP)}$$

Solution 1:

- Branch: $x \leq 0 \vee x \geq 1$.
- Solve LP$(-\infty, 0)$.
- We get optimum $(0, 2)$.

Correcting Integer Feasible Solutions is Not Enough



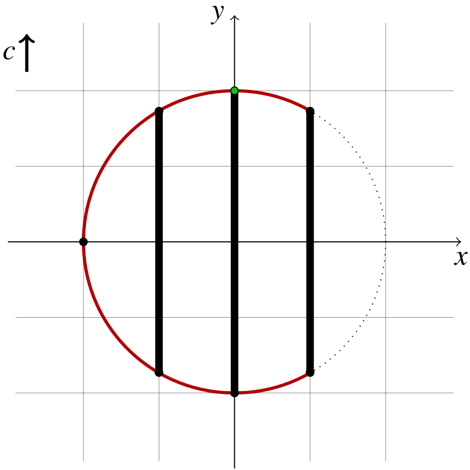
$$\max_{x,y} \quad y$$
$$(x, y) \in \mathcal{B}^2(2) \quad \text{(MINLP)}$$
$$x \in \mathbb{Z}$$

$$\max_{x,y} \quad y$$
$$(x, y) \in [-2, 2]^2 \quad \text{(LP)}$$

Solution 1:

- Branch: $x \leq 0 \lor x \geq 1$.
- Solve LP$(-\infty, 0)$.
- We get optimum $(0, 2)$.

Correcting Integer Feasible Solutions is Not Enough



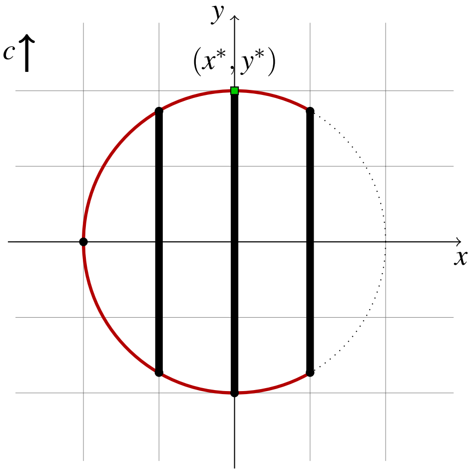
$$\max_{x,y} \quad y$$
$$(x, y) \in \mathcal{B}^2(2) \quad \text{(MINLP)}$$
$$x \in \mathbb{Z}$$

$$\max_{x,y} \quad y$$
$$(x, y) \in [-2, 2]^2 \quad \text{(LP)}$$

Solution 2:

- Solve NLP$(-\infty, 1)$.
- We get optimum $(0, 2)$.

Correcting Integer Feasible Solutions is Not Enough



$$\max_{x,y} \quad y$$
$$(x, y) \in \mathcal{B}^2(2) \quad \text{(MINLP)}$$
$$x \in \mathbb{Z}$$

$$\max_{x,y} \quad y$$
$$(x, y) \in [-2, 2]^2 \quad \text{(LP)}$$

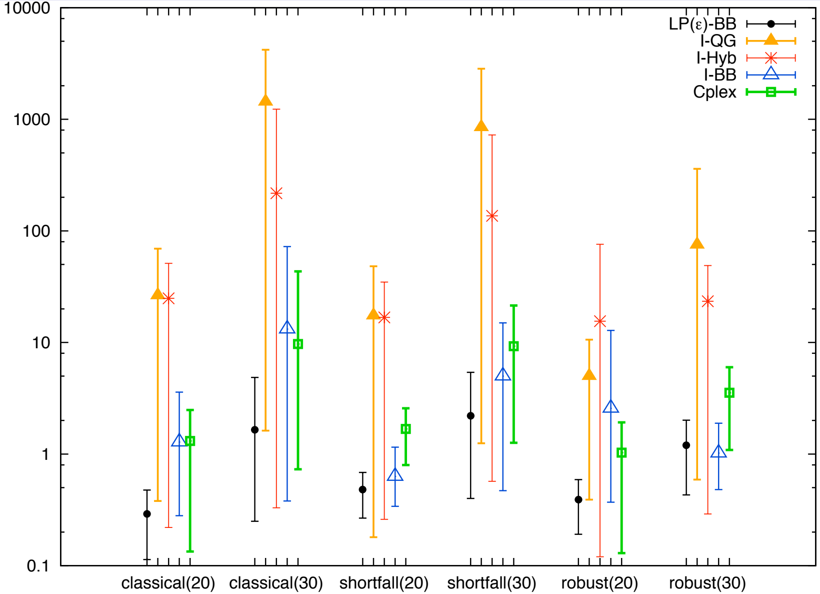
Solution 2:

- Solve NLP$(-\infty, 1)$.
- We get optimum $(0, 2)$.

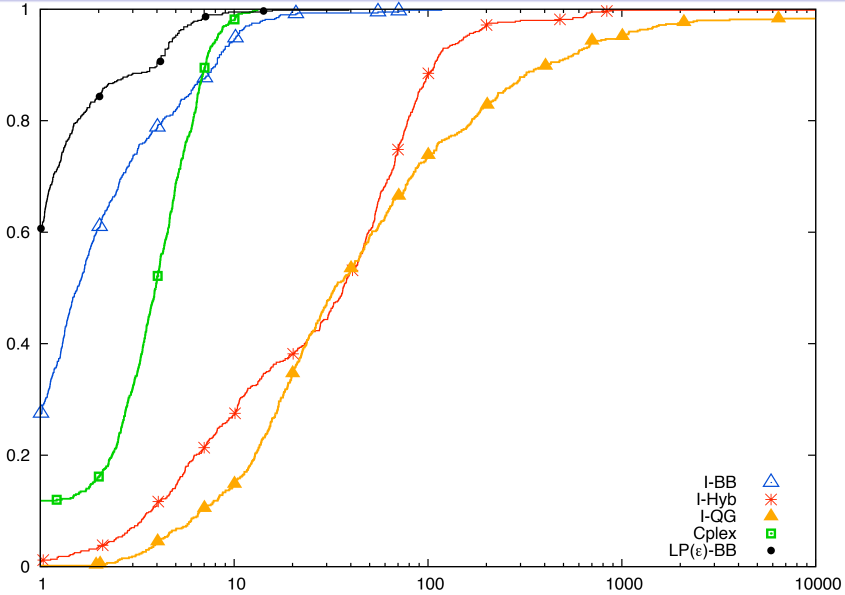
Instance Data

- Maximum number of stocks $K = 10$.
- Maximum risk $\sigma = 0.2$.
- Shortfall constraints: $\eta_1 = 80\%$, $W_1^{low} = 0.9$, $\eta_2 = 97\%$, $W_2^{low} = 0.7$ (Lobo et al., 1998, 2007).
- Data generation for Classical and Shortfall from S&P 500 data following Lobo et al. (1998), (2007).
- Data generation for Robust from S&P 500 data following Ceria and Stubbs (2006).
- Riskless asset included for Shortfall.
- Random selection of n stocks out of 462.
- 100 instances for $n \in \{20, 30, 40, 50\}$, 10 for $n \in \{100, 200\}$.

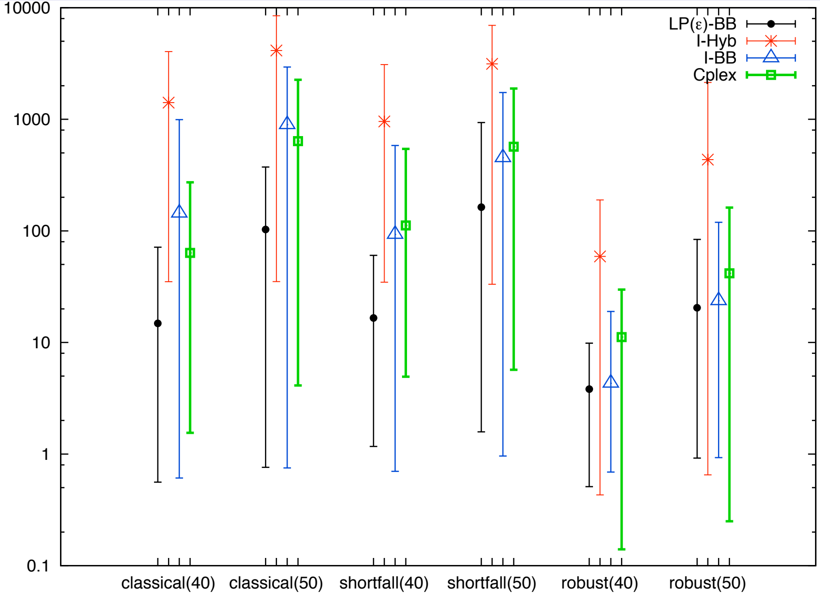
Average Solve Times [s] for $n \in \{20, 30\}$



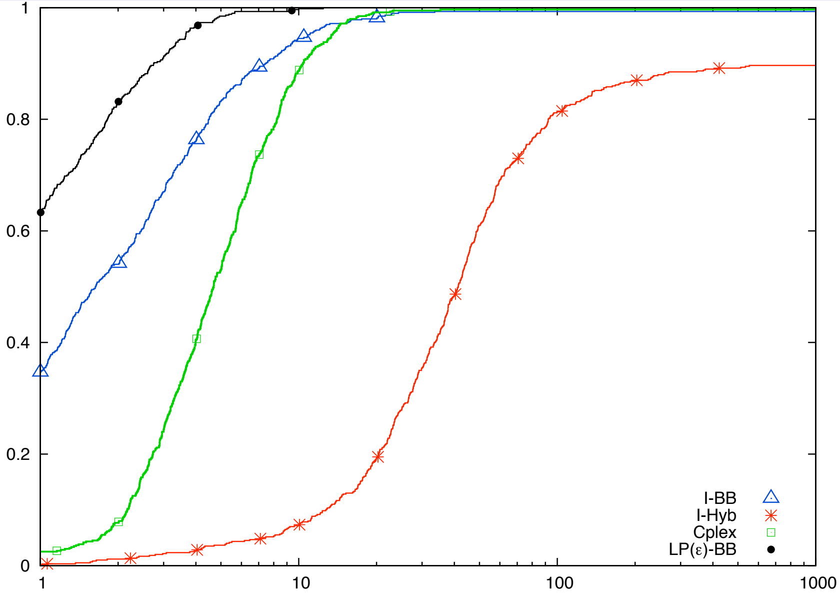
Performance Profile for $n \in \{20, 30\}$



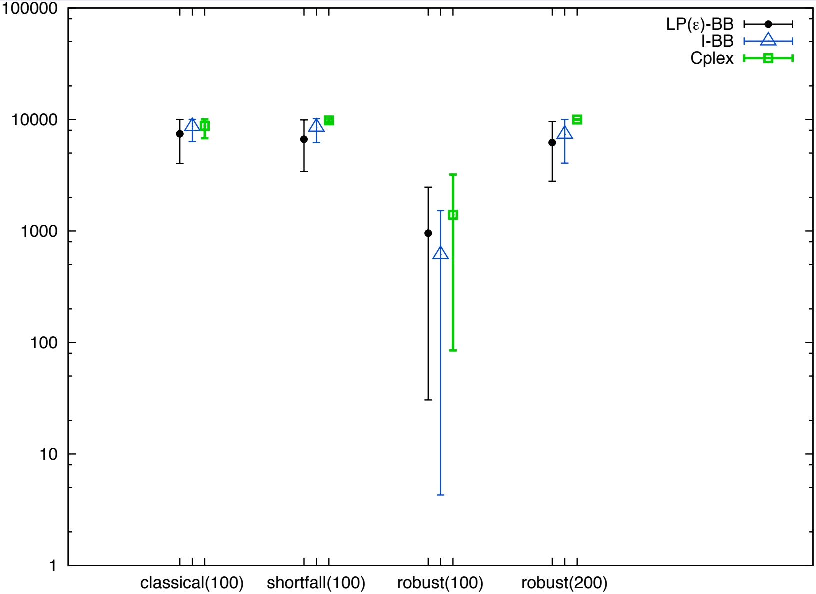
Average Solve Times [s] for $n \in \{40, 50\}$



Performance Profile for $n \in \{40, 50\}$



Average Solve Times [s] for $n \in \{100, 200\}$



Performance Profile for $n \in \{100, 200\}$